Total number of printed pages – 8

24–1R/23–1A/2024 (MAT1104C)

2024

MATHEMATICS

(MAJOR)

Paper : MAT1104C

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Separate $tan\,(x+iy)$ into real and imaginary parts (x and y being real).

$tan\,(x+iy)$ ক বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশত ভাগ কৰা (য'ত x আৰু y বাস্তৱ)।

(b) Use invertible matrix theorem to examine if the following matrix is invertible :

Contd.

মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোমনীয় উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ মৌলকক্ষটো প্ৰতিলোমনীয় হয়নে পৰীক্ষা কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$cosh^2 x - sinh^2 x = 1$

(d) Let (ধৰা)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and (আৰু) } \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Show that $\bar{s}$ is a solution of $A\bar{X} = \bar{b}$. Hence express $\bar{b}$ as a linear combination of the columns of A.

দেখুওৱা যে $\bar{s}$, $A\bar{X} = \bar{b}$ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ এটা সমাধান। সেয়েহে $\bar{b}$ ক A ৰ স্তম্ভসমূহৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে লিখা।

(e) Write the elementary row operations of a matrix.

মৌলকক্ষ এটাৰ প্ৰাথমিক শাৰী ৰূপান্তৰণ কেইটা লিখা।

2. Answer the following questions :

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the values of $\sum \alpha_1^2$ and $\sum \frac{1}{\alpha_1^2}$. 2+3=5

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ মূল হ'লে, $\sum \alpha_1^2$ আৰু $\sum \frac{1}{\alpha_1^2}$ ৰ মান উলিওৱা।

Or/নাইবা

Apply Descarte's rule of signs to find the nature of the roots of the following equations : 5

Descarte ৰ চিহ্নসম্পৰ্কীয় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণ কেইটাৰ মূলৰ প্ৰকৃতি নিৰূপণ কৰা :

(i) $x^6 - 3x^2 - x + 1 = 0$

(ii) $x^4 + 15x^2 + 7x - 11 = 0$

(b) Reduce the following matrix into Echelon form and find its rank : 5

তলৰ মৌলকক্ষটো Echelon ৰূপলৈ নিয়া আৰু ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Or/নাইবা

Show that the following system of equations is consistent and solve it using matrix method : 5

দেখুওৱা যে তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সমাধানযোগ্য আৰু মৌলকক্ষ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি ইয়াৰ সমাধান কৰা :

$$2x - y + 3z = 9, \quad x + y + z = 6, \quad x - y + z = 02$$

(c) If $5+i$ be a root of the equation $x^4 - 12x^3 + 72x^2 - 312x + 676 = 0$, then find the other roots. 5

$x^4 - 12x^3 + 72x^2 - 312x + 676 = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল $5+i$ হ'লে আন মূলকেইটা নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Solve the equation $x^3 - 12x + 8 = 0$ using Cardan's method. 5

কাৰ্ডনৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $x^3 - 12x + 8 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

3. Answer **either** [a and b] **or** [c and d] :

[a আৰু b] নাইবা [c আৰু d] অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Given that $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Define a transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ by $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, where $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Then solve $T : (\bar{x}) = \bar{b}$ for $\bar{x}$. 5

দিয়া আছে যে $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

এটা ৰূপান্তৰণ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

যাতে $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, য'ত $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. তেন্তে

$\bar{x}$ ৰ বাবে $T : (\bar{x}) = \bar{b}$ -ৰ সমাধান উলিওৱা।

(b) Find the nth roots of unity. Show that they are in geometric progression. 5

একৰ n-তম ঘাতৰ মূলসমূহ নিৰ্ণয় কৰা। দেখুওৱা যে এই মূলবোৰ এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকে।

(c) Solve the equation $3x^3-26x^2+52x-24=0$, the roots being in geometric progression. 5

$3x^3-26x^2+52x-24=0$ সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকিলে, সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা।

(d) Show that

দেখুওৱা যে

(i) $$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix} = 0$$ 2

(ii) $$sinhx = x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} + \cdots \cdots$$ 3

4. Answer ***either*** [a and b] ***or*** [c and d] :

[a আৰু b] *নাইবা* [c আৰু d] প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰাঃ

(a) Show that for all integral values of n, $cos n\theta + i sin n\theta$ is a value of $(cos\theta + i sin n\theta)^n$. 5

n ৰ সকলো অখণ্ড মানৰ বাবে দেখুওৱা যে $(cos\theta + i sin n\theta)^n$ ৰ এটা মান $cos n\theta + i sin n\theta$।

(b) Using De Moivre's theorem solve: 5

De Moivre ৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা:

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

(c) If (যদি) $a+b+c=0$, solve (সমাধান কৰা): 6

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

(d) Show that (দেখুওৱা যে) 4

$$(1+i)^n+(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

5. Answer ***either*** [a and b] ***or*** [c and d]:

উত্তৰ দিয়া [a আৰু b] *নাইবা* [c আৰু d]ঃ

(a) Explain Cramer's rule to find the solution of the following system of equations: 6

তলৰ সমাকৰণ প্ৰণালীটো সমাধান কৰিব পৰাকৈ Cramer ৰ নিয়মটো ব্যাখ্যা কৰা:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

(b) Use Cramer's rule to find the solutions of the system of equations : 4

Cramer ৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সমাধান কৰা:

$x-2y+3z=5,\ 4x+3y+4z=7,$
$x+y-z=-4$

(c) Use Cramer's rule to solve: 5

ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$x+2y+3z=6,\ 2x+4y+z=7,$
$3x+2y+9z=14$

(d) Separate into real and imaginary parts : বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশত ভাগ কৰা : 5

$tan^{-1}(x+iy)$